

Mitteilung aus dem Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau
der Technischen Universität Braunschweig

Amtliche Materialprüfanstalt für das Bauwesen

Direktoren: o.Prof. Dr.-Ing. Karl Kordina
o.Prof. Dr.-Ing. Gailus Rehm

Modelluntersuchungen über den Zusammenhang
zwischen Knicksicherheit und Eigenfrequenz
bei Rahmen

von

Dr.-Ing. Joachim Steinert

Gefördert mit Hilfe von Forschungsmitteln des Landes Niedersachsen.

Az.: II A BV 4e - 128 / 66

1. Einleitung

Für transversal schwingende, in ihrer Längsachse statisch belastete Balken oder Stützen besteht eine einfache Beziehung zwischen der axialen Belastung und der infolge der Längskraft P veränderlichen Eigenfrequenz f :

$$f = f_0 \sqrt{1 - \frac{P}{P_K}} = f_0 \sqrt{1 - \frac{1}{\nu}} \quad (1)$$

Hierbei bedeuten: f_0 Eigenfrequenz des unbelasteten Bauteils,
 P_K Eulersche Knicklast,
 ν Knicksicherheit.

Zwischen dem Quadrat der Eigenfrequenz und der Belastung besteht also eine lineare Abhängigkeit, die zur Ermittlung der Knicklast und damit zur Bestimmung der Knicksicherheit dienen kann. Diese Beziehung gilt jedoch näherungsweise auch für kompliziertere Tragwerke, z.B. Rahmen, insbesondere wenn Knickfigur und Schwingungsform hinreichend ähnlich sind. Koloušek /1/ hat ein Beispiel für einen dreistöckigen Rahmen gerechnet und für willkürlich angenommene Werte $\nu = 5,78$ bzw. $3,89$ gezeigt, daß die Genauigkeit der aus der Eigenfrequenz ermittelten Knicklast für symmetrisches Knicken ca. 15 % und für das praktisch wichtigere antisymmetrische Knicken ca. 5 % beträgt. Gleichung (1) ist seit langem in der Literatur bekannt /2/, jedoch wurde sie bisher zu einer experimentellen Bestimmung der Knicksicherheit durch Messung der Eigenfrequenz nur für Stützen verwendet /3/, wenn man von anderen Modelluntersuchungen absieht /4/5/.

Die Vorteile einer schwingungstechnischen Bestimmung von Knicklasten bzw. -sicherheiten sind die zerstörungsfreie Prüfung und die einfache, bezugspunktfreie Schwingungsanregung. Wollte man die Knicksicherheit durch Messung der Stieldurchbiegung infolge transversal wirkender statischer Probelasten ermitteln, was als ein gleichwertiges Verfahren angesehen werden kann, so wäre hierfür eine gegen einen äußeren Bezugspunkt abgestützte aufwendige Einrichtung zur Krafteinleitung zu verwenden.

Eine experimentelle Bestimmung der Knicksicherheit kann erforderlich werden,

a) wenn die tatsächlichen Randbedingungen eines Rahmens ermittelt werden sollen;

- b) wenn die Knicksicherheit von Rahmen interessiert, deren maximale Belastung nachträglich erhöht werden soll oder deren Tragfähigkeit gegenüber den ursprünglichen Belastungsannahmen durch äußere Einwirkungen, z.B. Stoßbelastung oder Feuerangriff, herabgesetzt wurde;
- c) wenn die Rahmenstiele und -riegel aus einer komplizierten Verbundkonstruktion mit unterschiedlichen Materialien bestehen.

Zunächst ist es jedoch notwendig, die aufgrund der Theorie vorhergesagte Linearität zwischen Frequenzquadrat und Belastung auch für Rahmentragwerke im Versuch nachzuweisen. Dabei interessiert besonders der Umfang des Linearitätsbereichs und die Größe der Probelastung, die zu einer möglichst genauen Bestimmung der Knicklast aufgebracht werden muß. Es ist zu beachten, daß die mit schwingungstechnischen Methoden ermittelte Knicklast praktisch aus der Euler-Theorie hergeleitet wird und daher nicht etwa die Traglast des Rahmens liefert. Allerdings erscheint eine Berechnung der zulässigen Tragspannung rückwirkend möglich, indem man nachträglich die zulässigen Materialspannungen sowie unvermeidbare Ausmittigkeiten bei der Belastung rechnerisch berücksichtigt.

Der Zusammenhang zwischen Knicksicherheit und Eigenfrequenz wurde an acht ein- und zweistöckigen Modellrahmen studiert. Vier Rahmen waren starr eingespannt, während die anderen vier gelenkig gelagert waren. Einzelheiten zur Durchführung sind in Abschnitt 3 nachzulesen.

2. Theoretische Grundlagen

Die theoretischen Grundlagen für das zweiparametrische Knick-Schwingungs-Eigenwertproblem sollen am Beispiel des einstöckigen, einfeldrigen Rahmens kurz erläutert werden. Die Differentialgleichung eines schwingenden, axial belasteten Stabes lautet:

$$EJ w''''(x) + P w''(x) - \mu \omega^2 w(x) = 0, \quad (2)$$

mit	w	Knick-Schwingungs-Amplitude	
	ω	Eigenkreisfrequenz	
	P	Axiallast	
	l	Länge	
	EI	Biegesteifigkeit	
	u	Masse pro Längeneinheit	
	k	Wellenzahl,	$k^4 = \omega^2 \frac{u}{EI}$
	α	Knick-Wellenzahl,	$\alpha^2 = \frac{P}{EI}$

und besitzt die allgemeine Lösung

$$w = A \cos x_1 x + B \sin x_1 x + C \operatorname{ch} x_2 x + D \operatorname{sh} x_2 x, \quad (3)$$

wobei $x_{1/2} = \sqrt{\sqrt{k^4 + \frac{\alpha^4}{4}} \pm \frac{\alpha^2}{2}}$ bedeutet.

Für die Ermittlung der Knicklast-Frequenz-Gleichung ist es nötig, die allgemeine Lösung jeweils für Stiele und Riegel, die im folgenden durch den Index 1 bzw. 2 unterschieden werden, an Randbedingungen anzupassen. Zur Vereinfachung empfiehlt es sich, die Rechnung für symmetrische und antimetrische Schwingungsformen getrennt durchzuführen.

Randbedingungen:

a) für gelenkige Lagerung: $w_1(0) = w_1''(0) = 0$

b) für starre Einspannung: $w_1(0) = w_1'(0) = 0$

antimetrische Form

symmetrische Form

$$w_1'''(l_1) + \alpha_1^2 w_1'(l_1) + k_1^2 \frac{1}{P} w_1(l_1) = 0$$

$$w_1(l_1) = 0$$

$$w_2(0) = w_2(l_2) = w_2''(l_2) = 0$$

$$w_2(0) = w_2'(l_2) = w_2'''(l_2) = 0$$

Übergangsbedingungen:

$$w_1'(l_1) = w_2'(0)$$

$$E_1 J_1 w_1''(l_1) = E_2 J_2 w_2''(0)$$

Durch Anpassung der allgemeinen Lösungen für Stiel und Riegel an die obigen Bedingungen erhält man die Gleichungen für die "Eigenkurven", die z.B. für die antisymmetrischen Schwingungs-Knick-Formen wie folgt lauten:

a) für starre Stielfußsinspannung:

$$0 = \frac{x_{11}}{k_2} \frac{E_1 J_1 \vartheta_2}{E_2 J_2 \vartheta_2} + \frac{(1+A^2)(\alpha_{12} + \beta_{12}) + A(1+A^2)(\alpha_{12} - \beta_{12}) + \frac{1}{p}[4A \vartheta_{12} + (1-A^2) \vartheta_{12}]}{2(1+A^2) + A(1-A^2) \vartheta_{12} + 2A^2 \vartheta_{12} + 2 \frac{\alpha_1^2}{x_{11}} [(1-A^2) \vartheta_{12} - A \vartheta_{12}] + \frac{1}{p}(1+A^2)[\alpha_{12} - \beta_{12} - A(\alpha_{12} + \beta_{12})]} \quad (4)$$

b) für gelenkige Stielfußlagerung:

$$0 = \frac{x_{11}}{k_2} \frac{E_1 J_1 \vartheta_2}{E_2 J_2 \vartheta_2} - \frac{(1+A^2) \vartheta_{12} + \frac{1}{p}[\alpha_{12} - \beta_{12} - A(\alpha_{12} + \beta_{12})]}{(A^2 + \frac{\alpha_1^2}{x_{11}^2})(\alpha_{12} + \beta_{12}) + A(\frac{\alpha_1^2}{x_{11}^2} - 1)(\alpha_{12} - \beta_{12}) + \frac{1}{p}(1+A^2) \vartheta_{12}} \quad (5)$$

Für $k = 0$ bzw. $\alpha = 0$ gehen diese Gleichungen in die Knickgleichungen bzw. Frequenzgleichungen über, die zur Berechnung der entsprechenden Eigenwerte dienen können. Allerdings interessiert nur jeweils die niedrigste Knicklast und die kleinste Eigenfrequenz, die man einfacher nach DIN 4114 bzw. aus der Biegelinie berechnen wird.

Grenzfälle:

a) für starre Stielfußsinspannung:

$$\text{Knickgleichung:} \quad \frac{\alpha l_2}{3} E_1 J_1 + E_2 J_2 \tan \alpha l_1 = 0 \quad , \quad (4.1)$$

$$A = 0 \quad , \quad x_{11} = \alpha$$

Schwingungsgleichung:

$$A = 1 \quad , \quad x_{11} = x_{11} = k$$

$$k_1 E_1 J_1 \frac{p \vartheta_1 - \vartheta_2}{\vartheta_1 + p \alpha_1} + k_2 E_2 J_2 \frac{\vartheta_2}{\vartheta_2} = 0 \quad , \quad (4.2)$$

7. für gelenkige Stielfußlagerung:

Knickgleichung:

$$\frac{\alpha l_2}{3} E_1 J_1 - E_2 J_2 \frac{1}{\tan \alpha l_1} = 0, \quad (5.1)$$

$$A = 0, \quad x_{11} = \alpha$$

Schwingungsgleichung:

$$A = 1, \quad x_{11} = x_{21} = A$$

$$A_1 E_1 J_1 \frac{p x_1 + \bar{x}_1}{\bar{x}_1 - p l_1} + A_2 E_2 J_2 \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_2} = 0. \quad (5.2)$$

In die Gleichungen (4) und (5) wurden folgende Abkürzungen eingeführt:

$$A = \frac{x_{21}}{x_{11}}, \quad p = \frac{\mu_1 l_1}{\mu_2 l_2} \cdot \frac{1}{A_1 l_1},$$

$$\alpha_{11} = \sin x_{11} l_1 \operatorname{ch} x_{11} l_1 + \cos x_{11} l_1 \operatorname{sh} x_{11} l_1,$$

$$\bar{x}_{12} = \sin x_{11} l_1 \operatorname{ch} x_{11} l_1 - \cos x_{11} l_1 \operatorname{sh} x_{11} l_1 \quad \text{bzw.}$$

$$\bar{x}_2 = \sin A_2 l_2 \operatorname{ch} A_2 l_2 - \cos A_2 l_2 \operatorname{sh} A_2 l_2,$$

$$l_{12} = 2 \cos x_{11} l_1 \operatorname{ch} x_{11} l_1,$$

$$\bar{l}_{12} = 2 \sin x_{11} l_1 \operatorname{sh} x_{11} l_1 \quad \text{bzw.}$$

$$\bar{l}_2 = 2 \sin A_2 l_2 \operatorname{sh} A_2 l_2,$$

$$\bar{\bar{x}}_{12} = \cos x_{11} l_1 \operatorname{ch} x_{11} l_1 - 1,$$

$$\bar{\bar{l}}_{12} = \cos x_{11} l_1 \operatorname{ch} x_{11} l_1 + 1.$$

Die Lösung der Gleichungen (4) und (5) erfolgte mit einer elektronischen Rechenmaschine. Dabei ergab sich, daß die zugehörigen Eigenwertkurven maximal 1,5 % von einer Geraden abweichen, so daß man für eine praktische Verwendung des schwingungstechnischen Verfahrens noch von einer Eigen-Geraden zu sprechen berechtigt ist. Die von Koloušek gefundenen, wesentlich größeren Abweichungen treten also bei einstöckigen Rahmen noch nicht auf. Auch für das antimetrische Problem des zweistöckigen Rahmens, das im Anhang zu diesem Bericht skizziert ist, erhält man

nahezu Eigen-"Geraden"; die Abweichung beträgt hier maximal 3,5 % und im Bereich bis $0,6 P_K$ weniger als 2,3 %.

In den obigen Gleichungen ist vorausgesetzt worden, daß die Belastung des Rahmens durch masselose Kräfte erfolgt. Das ist praktisch nur bei Windbelastung der Fall. Üblicherweise erfolgt die Belastung von Rahmen jedoch durch Massen im Schwerfeld der Erde; also gilt $P = M \cdot g$. Das hat zur Folge, daß die Eigenfrequenz der Rahmentragwerke sowohl durch die Kraft als auch durch die Masse herabgesetzt wird. Der Rahmen verhält sich unter zunehmender Massebelastung so, als würde er aus einem Material mit lastabhängiger Dichte bestehen. Der Masseneinfluß kann jedoch leicht durch folgende Beziehung korrigiert werden:

$$f_{\text{korv.}}^2 = f_{\text{gem.}}^2 \cdot \frac{m_x + M}{m_x} = f_0^2 \left(1 - \frac{M \cdot g}{P_K} \right) .$$

Es ist hierbei zu beachten, daß sich die Bezugsmasse m_x , für die man beispielsweise die schwingende Masse m_0 des unbelasteten Rahmens ansetzen kann, nicht auf den Wert der Knicklast auswirkt, wenn auch das Verhältnis $\frac{m_0}{m_x}$ den Anfangsbereich wesentlich beeinflusst, vgl. Bild 1.

3. Versuchsaufbau und -durchführung

Die Modellrahmen bestehen aus Messing von $0,6 \times 3,48$ cm Rechteckquerschnitt, das einen Elastizitätsmodul von $1,00 \cdot 10^6$ kp/cm² und eine spezifische Masse von $8,55$ g/cm³ besitzt. Die biegesteifen Ecken wurden durch Stahlwinkel realisiert und die Lagerung der Rahmenstiele in der aus Bild 2 ersichtlichen Weise vorgenommen. Für die Untersuchungen wurden die Rahmen auf einem speziell dafür konstruierten schweren Aufspannbett befestigt.

Die Wahl der Rahmenabmessungen war durch zwei Gesichtspunkte bestimmt. Die Knicklast mußte so gering sein, daß es möglich und zumutbar war, dieser durch Belastung der Rahmenstiele mit Belastungsmassen, wie Gewichtsstücken, Stahlplatten, Betonklötzen o.ä., nahe zu kommen. Andererseits sollte jedoch die Eigenfrequenz zwecks genauer Messung möglichst hoch sein. Diese beiden widerspruchsvollen Forderungen

ließen sich jedoch nur mangelhaft miteinander vereinbaren. Die gewählten Abmessungen können aus Tabelle 1 ersehen werden; damit ergibt sich, daß die Eigenfrequenz im baupraktisch üblichen Bereich zwischen etwa 10 und 40 Hz liegt. Lediglich der Rahmen "1 B" ergab eine so niedrige Eigenfrequenz im unbelasteten Zustand, daß auf Untersuchungen mit Belastung verzichtet werden mußte.

T a b e l l e 1

Rahmen Nr.	Lagerung	Stiellänge l_1 in mm	Stiellänge ⁺) l_3 in mm	Riegellänge l_2 in mm	Gewicht ⁺⁺) in kp
1A	starre Einspannung der Stielfüße	577	-	554	3,38
2A		262	310	554	4,37
3A		272	-	554	2,34
4A		272	-	256	1,81
2B	gelenkige Lagerung der Stielfüße	305	310	554	4,96
3B		315	-	554	2,93
4B		315	-	256	1,40

⁺) bei zweistöckigen Rahmen, oberer Stiel

⁺⁺) Gewichte einschließlich Versteifungswinkel

Einen Eindruck von der Versuchsanordnung sollen die drei Fotos, Bild 3 bis 5, vermitteln. Die Schwingungsanregung erfolgte bei Frequenzen unter 3 Hz durch Loslassen einer oberen Rahmenecke nach einer geringen Anfangsauslenkung; die Eigenfrequenz wurde durch Zeitmessungen für 10 bis 20 Schwingungen, zum Teil aus Oszillographenaufzeichnungen, bestimmt.

Bei Frequenzen über 3 Hz wurden die Rahmen zu erzwungenen Schwingungen mit Hilfe eines elektrodynamischen Wandlers erregt; die Messung der Resonanzfrequenz erfolgte hierbei mit einem elektronischen Zählgerät. Das erste Verfahren mußte vor allem bei den antisymmetrischen Schwingungsformen verwendet werden, wenn die Frequenz durch hohe Belastung der Stiele bereits stark reduziert war. Ein über der normalen Meßunsicherheit liegender Unterschied zwischen Eigenfrequenz und Resonanzfrequenz konnte nicht beobachtet werden.

Zur Belastung wurden Gewichte, Stahlplatten und ca. 8 kg schwere, 20 x 20 cm² große Betonklötze verwendet. Die Lasteintragung erfolgte vorzugsweise mittig über den Stielen, nachdem am Rahmen "1A" der Einfluß einer "ausmittigen" Belastung sowohl für die antisymmetrische als auch für die symmetrische Schwingungsform untersucht worden war. Für kleinere Belastungen wurde eine mit der gewünschten Last versehene Verteilungsplatte auf die betreffenden Riegelquerschnitte aufgesetzt, während für hohe Lasten ein besonderes Gestell konstruiert worden war. In beiden Fällen erfolgte die Belastung bezüglich des Querschnittes punktartig, indem die Verteilungsplatten auf zwei gehärteten Stahlschneiden angeordnet wurden.

4. Meßergebnisse

Der theoretisch zu erwartende lineare Zusammenhang zwischen Quadrat der Eigenfrequenz und Last konnte für antimetrische Rahmenschwingungen bei beiden untersuchten Stielfußlagerungen unabhängig von der Art der Belastung nachgewiesen werden, vgl. Bild 6 und 8 bis 10.

In nahezu allen Fällen tritt bei den ersten Belastungsstufen, die etwa das ein- bis fünffache des Rahmeneigengewichtes betragen, ein Frequenzsprung - z.B. bei Rahmen 1 und 4 - auf, der durch Wahl einer geeigneten Bezugsmasse m_x reduziert werden kann. Diese Frequenzänderung kann auf eine Änderung der Einspannung unter Last und vorwiegend auf die Ungenauigkeit der Massenkorrektur zurückgeführt werden. Infolge des etwas überkragenden Riegels, der Versteifungswinkel und Verschraubungen sowie der Einspannlaschen ist die Berechnung der schwingenden Masse des unbelasteten Rahmens nur näherungsweise möglich. Daher wurde bei der Auswertung der Meßergebnisse für Bild 8 bis 10 die Masse m_x in Gleichung (6) willkürlich so gewählt, daß die Eigengerade die Ordinate bei $f^2/f_0^2 = 1$ schneidet. Wie bereits in Abschnitt 2 erörtert, beeinträchtigt die Massenkorrektur aber nicht den Schnittpunkt der Eigengeraden mit der Abszisse, sondern nur deren Neigung. Dieses Verhalten bedeutet, daß grundsätzlich eine bestimmte Mindestbelastung erfolgen muß, ehe sich die zur Bestimmung der Knicklast geeignete lineare Abhängigkeit einstellt. Nach Bild 1 beträgt diese Mindestbelastung unter der Annahme, daß die mit-schwingende Masse m_0 von der Korrekturmasse 100 % abweicht etwa 0,1 P_K. In den Bildern 11 und 12 sind die Ergebnisse für die Rahmen 2 bis 4 nochmals angegeben, wobei jedoch die rechnerisch abgeschätzte Eigenmasse zur Korrektur verwendet wurde. Wie man erkennt, führt das Bemühen, die schwingende Rahmenmasse als Korrektur zu verwenden, bei den ersten Laststufen zu "gekrümmten" Kurven analog Bild 1.

Durch Extrapolation der aus den Abbildungen ersichtlichen, freihand eingetragenen mittleren Geraden erhält man für $f \rightarrow 0$ die "gemessene" Knicklast P_{Kg} , die in Tabelle 2, in der auch die berechnete Knicklast P_{Kb} und der Bereich der geprüften Knicksicherheit angegeben sind, für alle Rahmen zusammengestellt wurde.

T a b e l l e 2

Rahmen	gemessene Knicklast P_{Kg} in kp	berechnete Knicklast P_{Kb} in kp	untersuchter Knicksicher- heitsbereich $P_{Kb}/P = \infty \dots$	Beginn der Linearität $r^2(P)$ P/P_{Kg}	Relative Abweichung $\frac{P_{Kg} - P_{Kb}}{P_{Kb}}$
1A	136	140	2,1	0,13	-0,03
2A ⁺)	197	-	1,7	0,05	-0,30
	280	282	4,0	0,07	-0,01
3A	525	509	2,0	0,06	+0,03
4A	478	636	7,7 ⁺⁺)	0,04	-0,25
2B	92 ... 107	125	4,8	0,06	-0,26 -0,08 ⁺⁺⁺)
3B	120	95	0,9	0,17	+0,26
4B	148	122	1,6	0,13	+0,21

⁺) Bei Rahmen 2 handelt es sich um Rahmen 1 mit einem zusätzlichen Riegel, der anfangs nur von der Stirnseite her mit den Stielen verschraubt war (Ergebnisse 1. Zeile) und erst danach mit Winkelleisen biegesteif an die Stiele angeschlossen wurde (Ergebnisse 2. Zeile).

⁺⁺) Bei diesem Rahmen war der Lastbereich mit den vorhandenen Belastungseinrichtungen nicht zu erweitern, da störende Torsionsschwingungen auftraten, die nicht beseitigt werden konnten.

⁺⁺⁺) Eine große Meßunsicherheit bei kleinen Laststufen macht sich als große Unsicherheit bei der Bestimmung der Knicklast bemerkbar.

Wie aus Tabelle 2 ersichtlich ist, kann die Genauigkeit der gemessenen Knicklast zunächst nur mit Einschränkungen als baupraktisch ausreichend angesehen werden, sofern man die Rechenwerte als genau ansieht. Die Abweichungen der gemessenen von der berechneten Knicklast betragen -30 % bis + 26 %, sie sind also sowohl positiv als auch negativ, so daß man mit der experimentell bestimmten Knicklast nicht grundsätzlich auf der sicheren

Seite liegt, wie es für eine praktische Anwendung wünschenswert wäre. Allerdings sind die größeren Abweichungen zu erklären. Bei Rahmen 2 wurde der untere Riegel erst nachträglich, und zwar nur für starre Stielfuß-Einspannung, biegesteif an die Stiele angeschlossen. Es ist aber verständlich, daß bei einer elastischen Riegelankopplung die Knicklast kleiner ist, d.h. das berechnete P_{Kb} ist hier nicht zutreffend. Aufgrund der guten Linearität wird angenommen, daß die "gemessene" Knicklast den Wert für die tatsächlich vorhandenen Randbedingungen darstellt. Bei Rahmen mit gelenkiger Lagerung sind größere Abweichungen positiv, also $P_{Kg} > P_{Kb}$, während für starre Einspannung der Stielfüße das umgekehrte gilt. Daher wird auch hier die gemessene Knicklast als richtig angesehen; denn es ist sehr unwahrscheinlich, daß eine reibungsfreie gelenkige Lagerung - bei Belastung - bzw. eine völlig starre Einspannung realisiert werden konnte. An Rahmen 3B wurde durch entsprechend hohe Belastung unmittelbar nachgewiesen, daß die Rechnungsannahmen zweifelhaft sind, da im Versuch eine Knicksicherheit von $\nu = 0,9$, also $\gamma < 1$ erreicht wurde, was der Definition der Knicksicherheit widerspricht. Aus den Meßergebnissen läßt sich entnehmen, daß eine bautechnische Ermittlung der Knicklast eine Mindestbelastung des Rahmens von etwa 10 % der zu erwartenden Knicklast erforderlich macht.¹⁾ Außerdem sollte der Bereich für die Probelastung, innerhalb dessen mindestens 4 Frequenzmessungen durchzuführen sind, ebenfalls 10 % der Knicklast betragen. Wenn die Belastung zu gering ist, treten infolge der Unsicherheit bei der Festlegung der Eigengeraden große Abweichungen auf, vgl. Ergebnisse für Rahmen 2B. Eine Bestimmung der Knicklast aus den Eigenfrequenzen bei Rahmeneigengewicht und unter einer Zusatzlast, also nur bei zwei Laststufen, ist entgegen früher geäußerten Annahmen /2/ nicht möglich.

Bei der symmetrischen Schwingungsform konnte keine wesentliche Frequenzänderung mit der Belastung beobachtet werden, so daß es nach den bisher vorliegenden Meßergebnissen keine Möglichkeit zu einer schwingungstechnischen Ermittlung der Knicksicherheit von symmetrisch knickenden Rahmen zu geben scheint, vgl. Bild 7. Allerdings ist hierbei zu bedenken, daß dieser Sachverhalt bei sehr kurzstielligen Rahmen bzw. solchen mit sehr steifen Stielen, die symmetrisch knicken und deren tiefste Eigenfrequenz dann auch zu einer symmetrischen Form gehört, umgekehrt sein kann.

1) und zwar auch dann, wenn durch Probieren eine optimale Korrekturmasse m_x gefunden wurde.

Ein weiterer Unterschied zum Schwingungsverhalten mit antimetrischer Form ist die starke Frequenzabhängigkeit bei nicht mittiger Belastung der Rahmenstiele und symmetrisch schwingenden Rahmen. Hier führt auch eine Frequenzkorrektur für die mitschwingende Masse in Abhängigkeit vom Kraftangriffspunkt nicht zu einer Deckung mit der Meßkurve für mittige Stielbelastung, sondern eher zu einem starken Frequenzanstieg. Daher sind die in Bild 7 wiedergegebenen Meßergebnisse nicht mit einer Massenkorrektur versehen worden.

Das Verhalten des symmetrisch schwingenden Rahmens unter ausmittiger Belastung war in ähnlichen Versuchen bereits an exzentrisch gedrückten Stäben beobachtet worden /3/. Dieser Effekt wird wie folgt erklärt: Ausmittige Belastung der Rahmenstiele führt bereits in der Ruhelage zu einer Verformung des Rahmens. Wird ein derartiger Rahmen zu Schwingungen angeregt, dann verhält er sich bei antisymmetrischen Schwingungen wie ein Stabwerk aus schwach gekrümmten, jedoch unbelasteten Stäben, da sich die dynamischen Biegemomente über Stiel und Riegel zu jedem Zeitpunkt ausgleichen, hingegen überlagern sich bei der symmetrischen Form die dynamischen Biegemomente den statischen, die über den gesamten Rahmen die gleiche oder die entgegengesetzte Richtung - je nach dem Momentanwert der Schwingung - besitzen; daher ist ein zusätzlicher Energieaufwand erforderlich, der sich in einer Frequenzzunahme auswirkt.

5. Zusammenfassung

Wie bei Stützen besteht theoretisch auch bei Rahmentragwerken ein annähernd linearer Zusammenhang zwischen dem Quadrat der Rahmen-Eigenfrequenz und der Belastung der Rahmenstiele für starre und gelenkige Fuß einspannung. Es wurde deshalb an Modellrahmen untersucht, inwieweit diese Gesetzmäßigkeit zu einer experimentellen Bestimmung der Knicklast verwendet werden kann. Die Messungen bestätigten die lineare Abhängigkeit und ergaben, unter der Annahme, daß die gemessenen Werte durch die tatsächlichen Randbedingungen und Massen- sowie Steifigkeitsverteilungen bestimmt sind, eine für baupraktische Zwecke ausreichende Genauigkeit der experimentell ermittelten Knicklasten, sofern die Modellrahmen zu antimetrischen Schwingungen angeregt wurden. Dagegen ist die schwingungstechnische Methode für symmetrische Grundschwingungsformen ungeeignet, da hier nicht nur eine unwesentliche Frequenzabhängigkeit von der Belastung beobachtet wurde, sondern sich auch eine ausmittige Lasteintragung über den Stielen in noch nicht quantitativ erfaßbarer Weise auswirkt.

L i t e r a t u r :

- /1/ Koloušek, V.: Baudynamik der Durchlaufträger und Rahmen
Leipzig: Fachbuchverlag GmbH 1953
- /2/ Hohenemser, K.H.,
Prager, W.: Dynamik der Stabwerke
Berlin: Springer-Verlag 1933
- /3/ Steinert, J.: Möglichkeiten der Bestimmung der kritischen
Last von Stab- und Flächentragwerken mit
Hilfe ihrer Eigenfrequenz
Diss. TH Braunschweig 1967
- /4/ Lurie, H.: Lateral Vibrations as Related to Structural
Stability
Journ. of Appl. Mech. (1952), Nr. 6, S. 195
- /5/ Steinert, J.: Über das Schwingungsverhalten auf Druck be-
anspruchter Stäbe
Materialprüfung, Bd. 10 (1968), Nr. 6,
S. 181/186

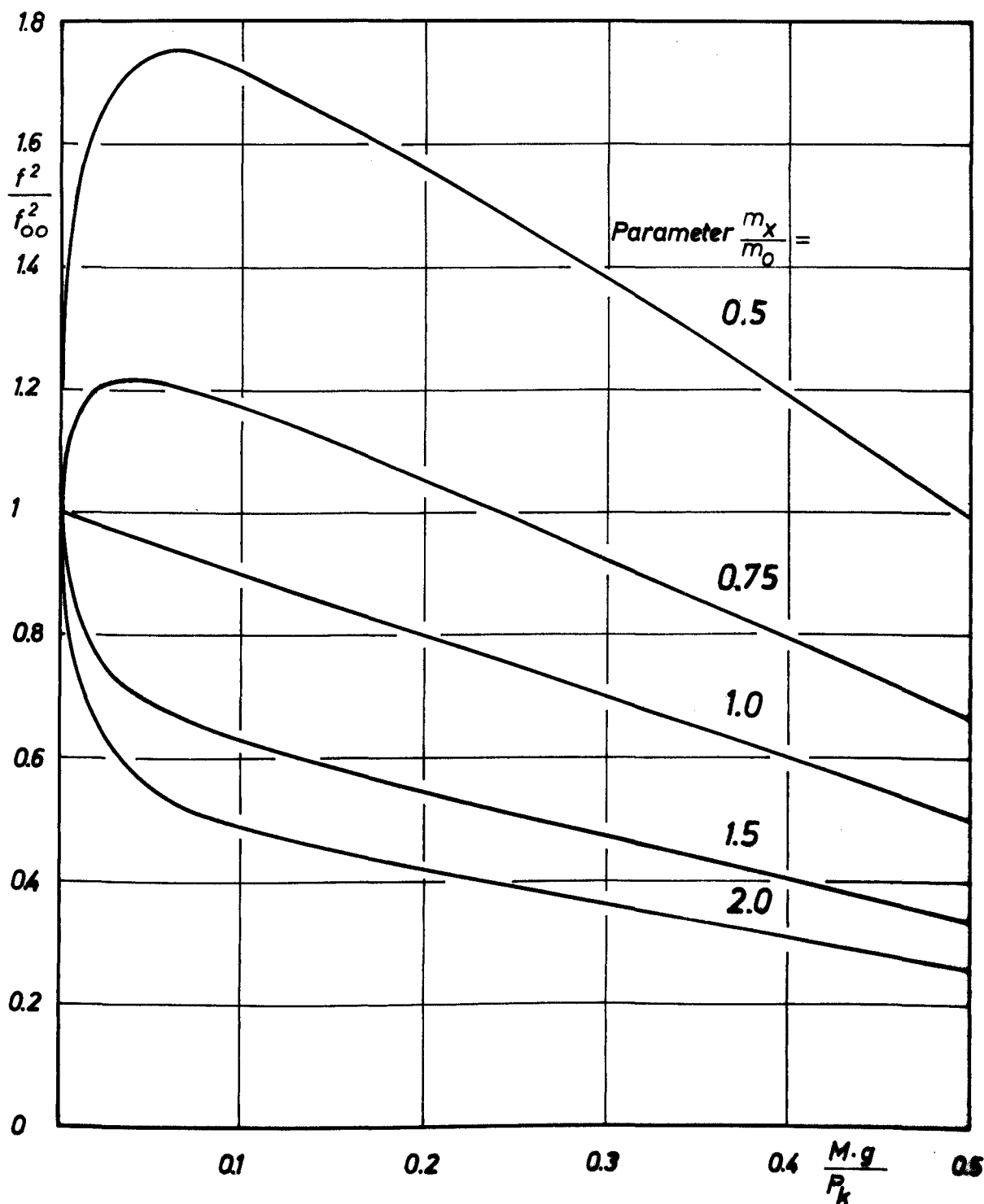


Bild 1: Einfluß des Verhältnisses von mitschwingender Rahmenmasse m_o zu Korrekturmasse m_x im Bereich kleiner Lasten $P = M \cdot g$

$$f^2 = f_{\text{gem}}^2 \cdot \frac{m_x + M}{m_x} = f_{\text{oo}}^2 \cdot \frac{m_o}{m_x} \cdot \frac{m_x + M}{m_o + M} \left(1 - \frac{Mg}{P_k}\right)$$

Zu beachten: Sämtliche Näherungsgeraden für $P > 0,1$ schneiden die Abszissenachse bei $P = P_k$!

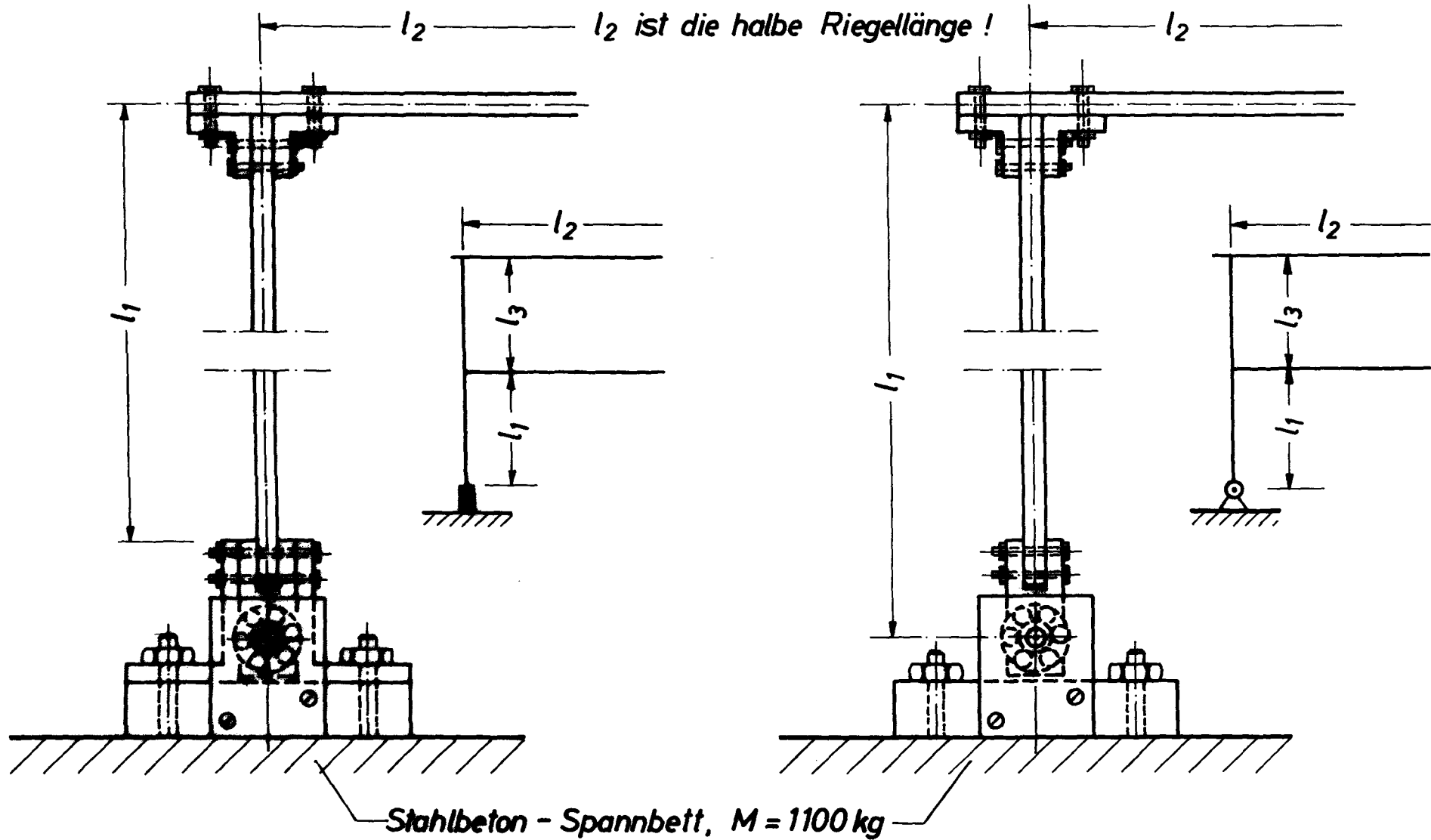


Bild 2: Ansicht der einstöckigen und Skizze der zweistöckigen Modellrahmen.

Bild 3: Rahmen 1A, ausmittig belastet

Schwingungsaufnehmer am linken Stiel
Schwingungserreger im Biegemoment

Bild 4: Geräteanordnung zur Messung der Schwingungen

links: Zweistrahl-Oszillograph zur Ermittlung der Schwingungsform

Mitte: Schwingungsanalysator

rechts: Tieftongenerator, Bereich 2 bis 2000 Hz

Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau
Technische Hochschule Braunschweig
Amliche Materialprüfanstalt für das Bauwesen

Bild 9: Rahmen 2B mit Belastungsgerüst
Belastung 2 x 40,4 kp

Institut für Baustoffkunde und Stahlbetonbau
Technische Hochschule Braunschweig
Amtliche Materialprüfanstalt für das Bauwesen

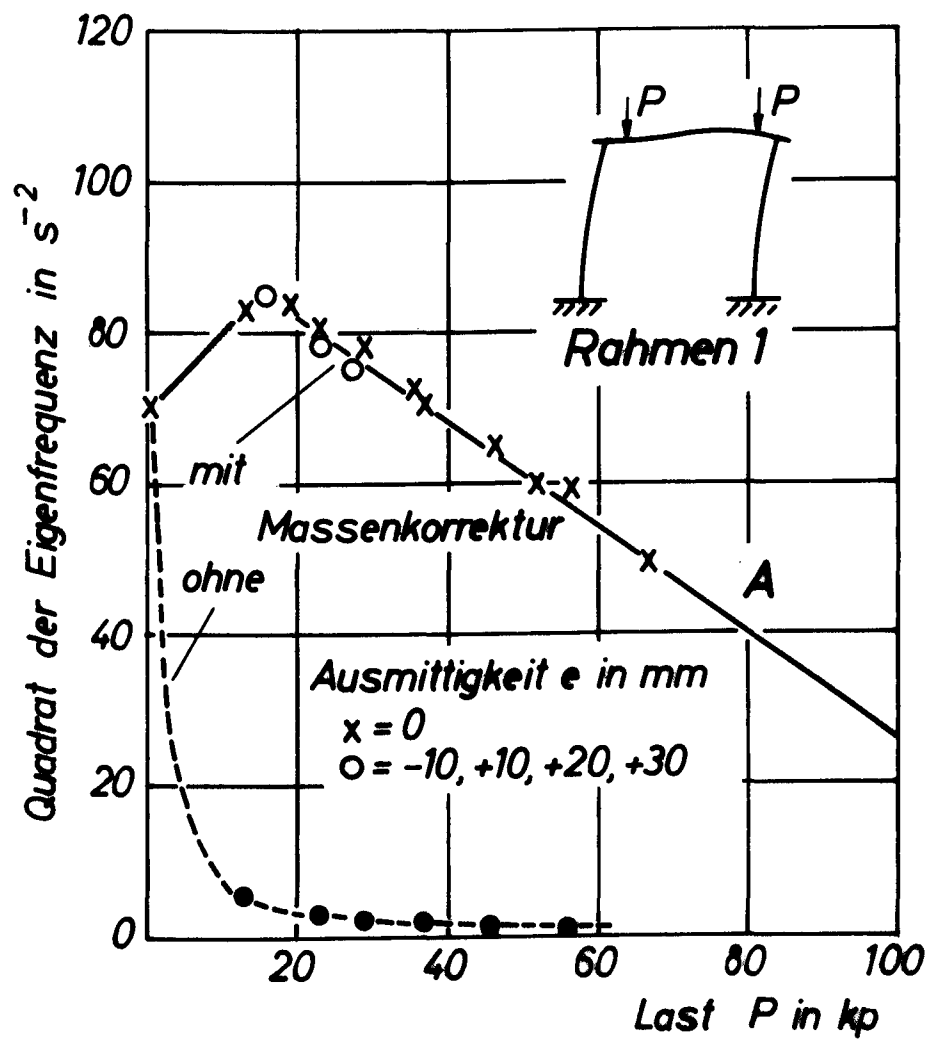


Bild 6: Meßergebnisse für Rahmen 1, starre Fuß einspannung
antimetrische Schwingungsform, mittige und ausmittige
 Belastung

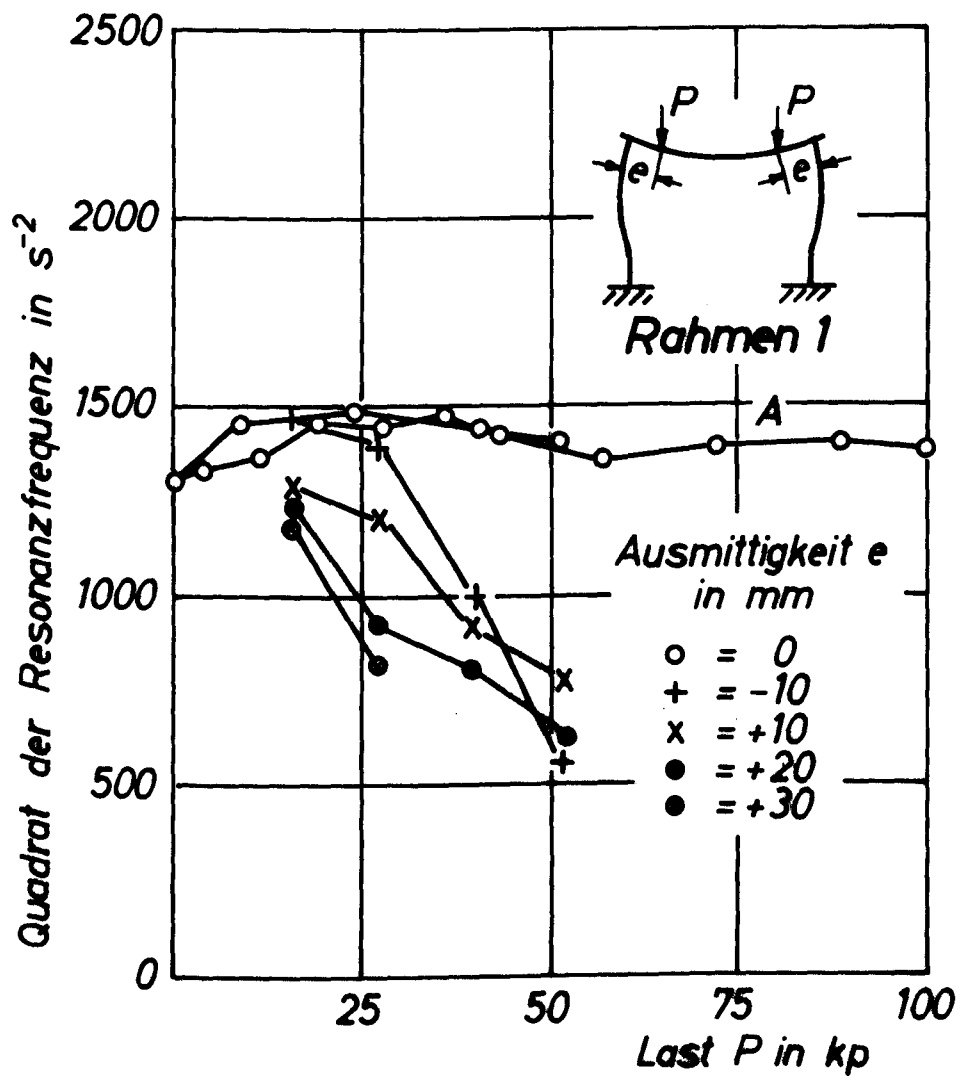


Bild 7: Meßergebnisse für Rahmen 1, starre Fußeinspannung
symmetrische Schwingungsform, mittige und ausmittige
Belastung

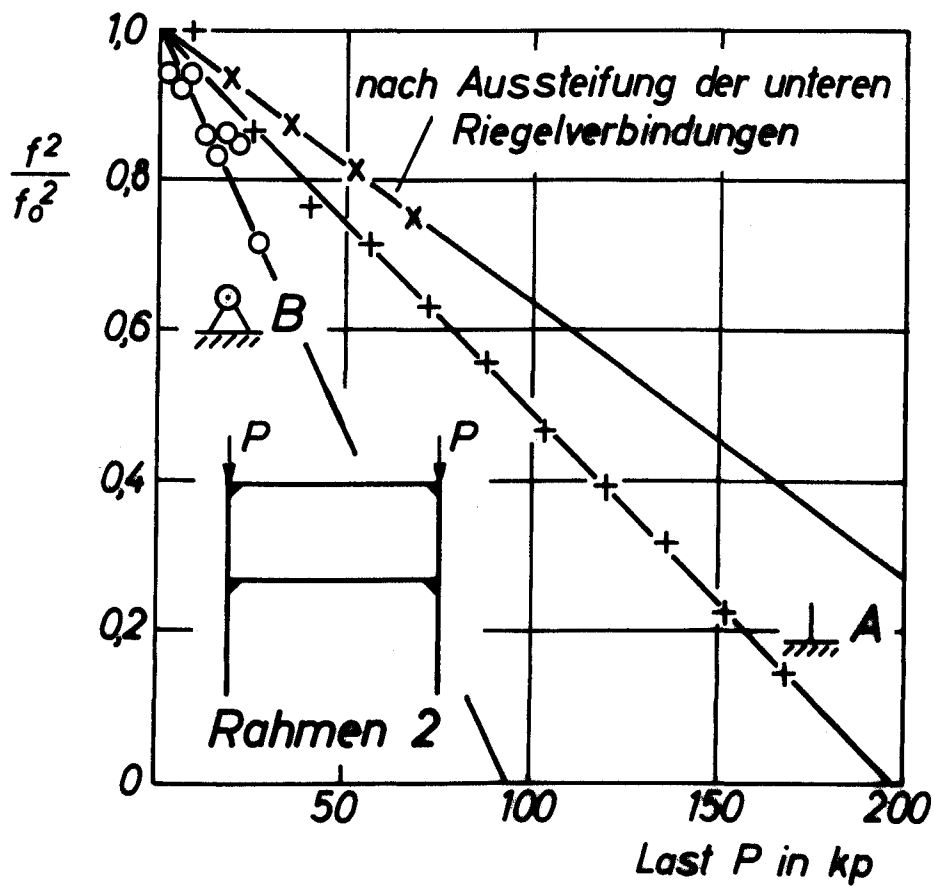


Bild 8: Meßergebnisse für die antimetrische Schwingungsform
bei fußfester und gelenkiger Lagerung, mittige Belastung
- Rahmen 2 -

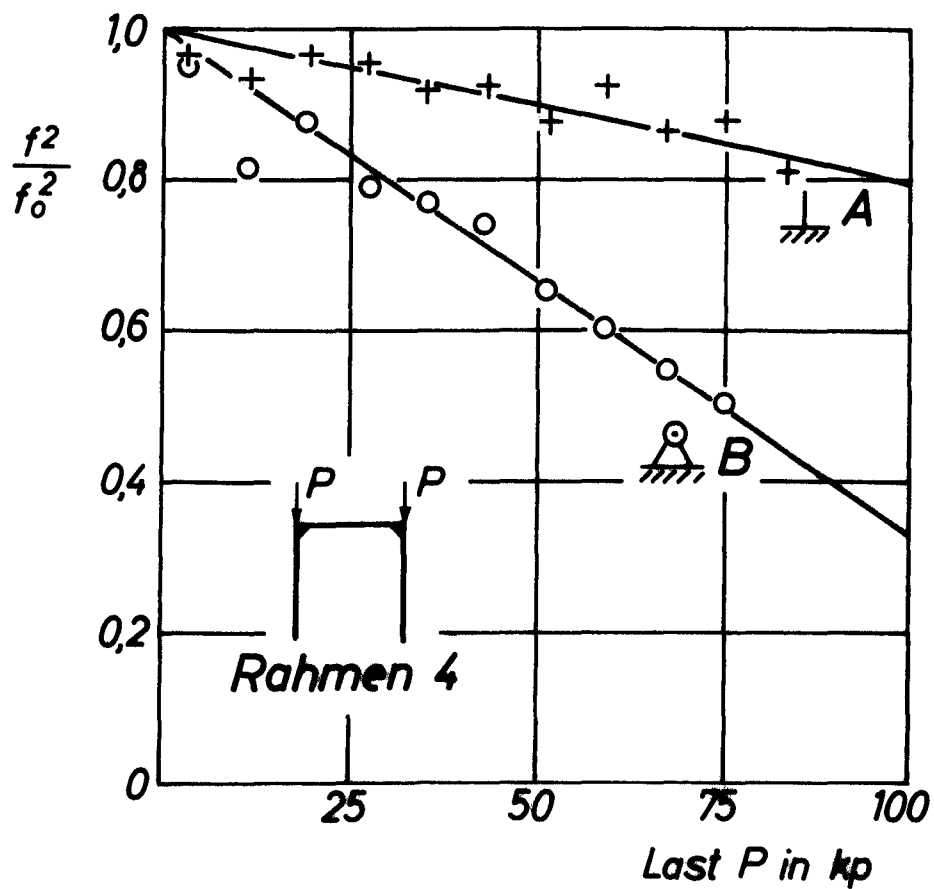


Bild 9: Meßergebnisse für die antimetrische Schwingungsform bei fußfester und gelenkiger Lagerung, mittige Belastung
- Rahmen 3 -

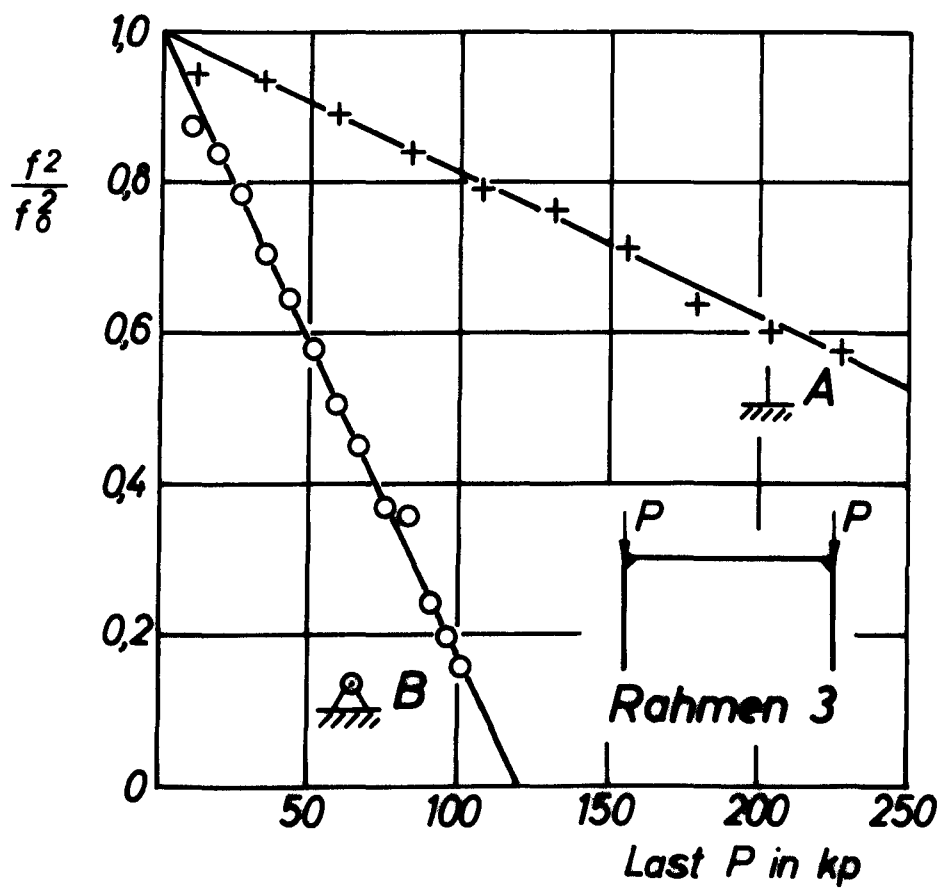


Bild 10: Meßergebnisse für die antisymmetrische Schwingungsform bei fußfester und gelenkiger Lagerung, mittige Belastung
- Rahmen 4 -

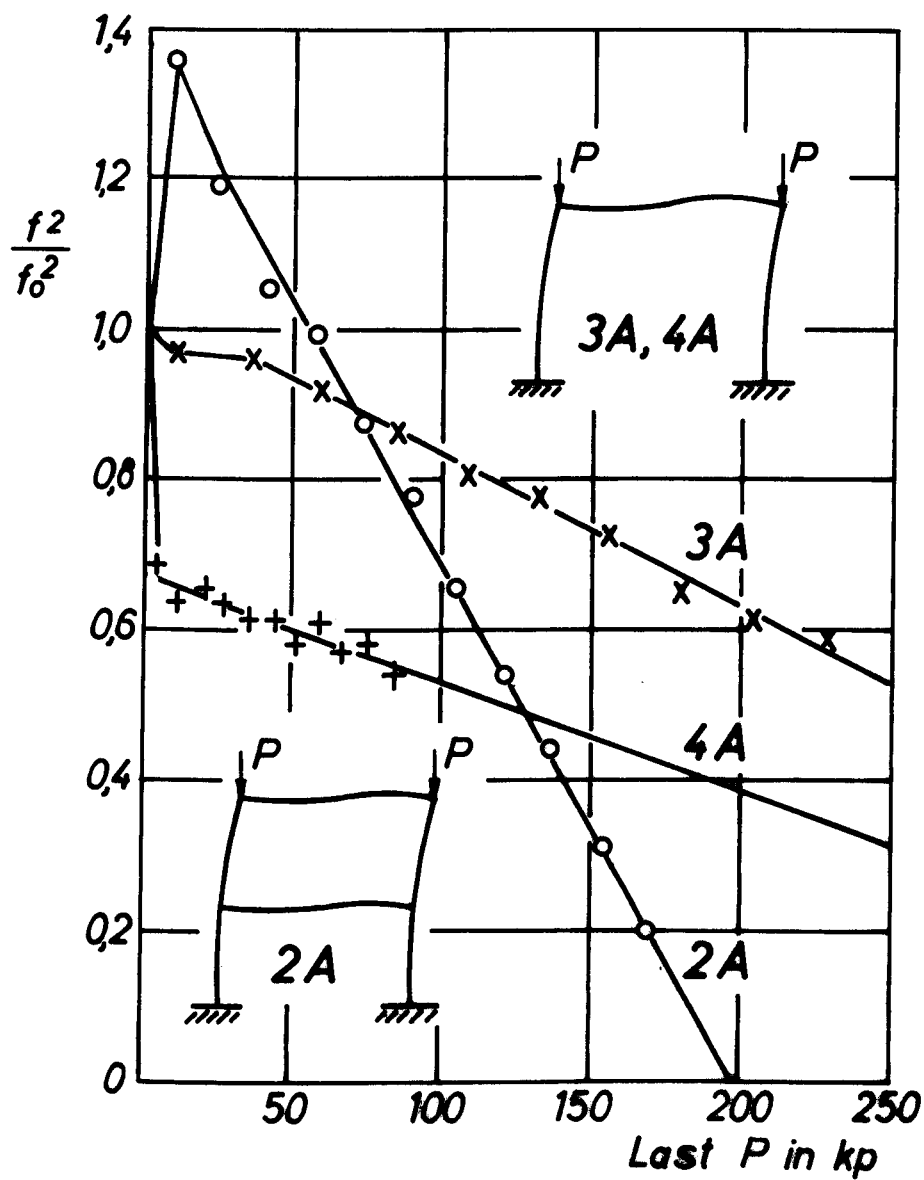


Bild 11: Meßergebnisse für die antisymmetrische Schwingungsform der Rahmen mit eingespannten Stiebfüßen, mitschwingende Rahmenmasse als Bezugswert für die Massenkorrektur

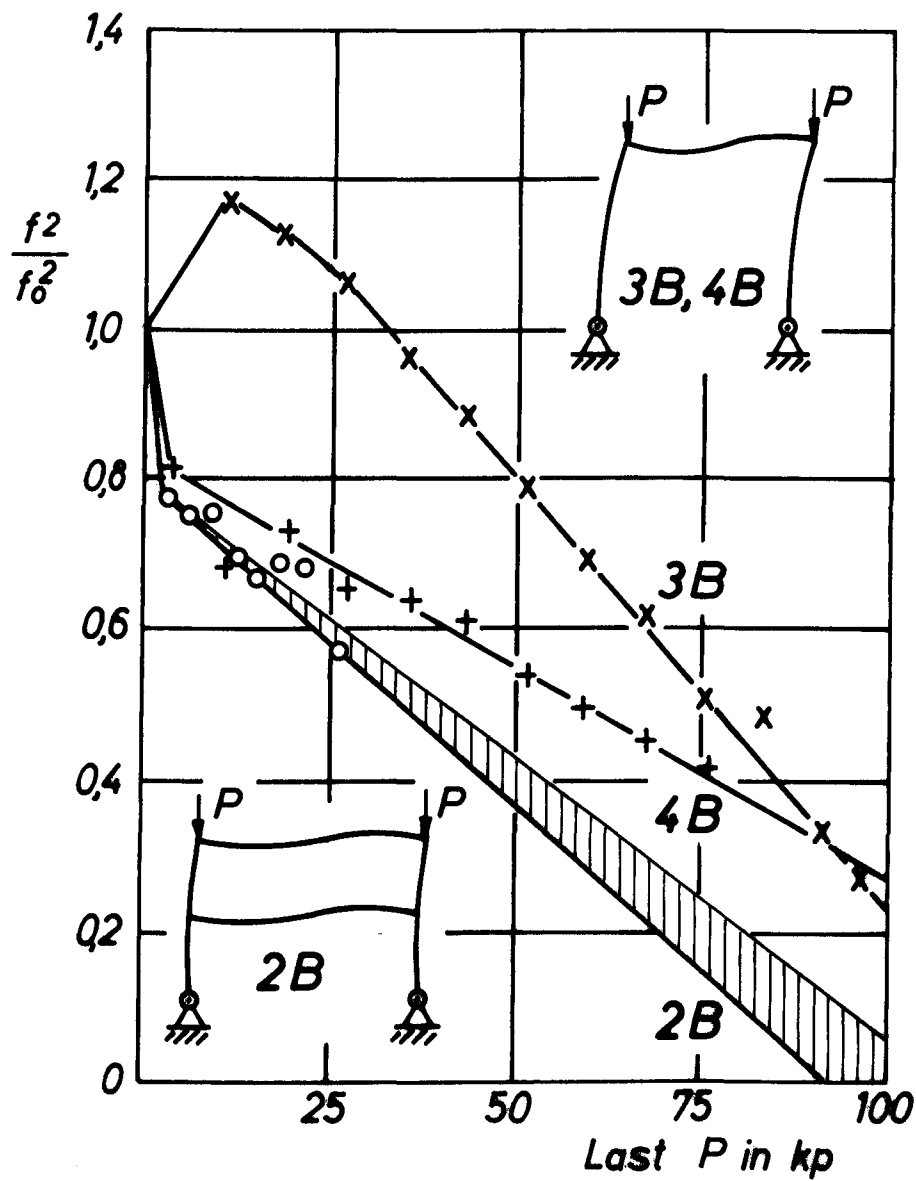
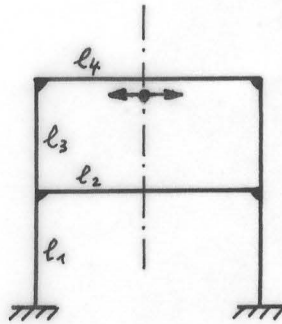


Bild 12: Meßergebnisse für die antimetrische Schwingungsform der Rahmen mit gelenkig gelagerten Stielfüßen, mit-schwingende Rahmenmasse als Bezugswert für die Massen-korrektur

A n h a n g

Antimetrisches Knick-Schwingungsproblem des zwei-
stöckigen Rahmens mit eingespannten Stielfüßen

Bedeutung der Symbole siehe Seite 4.



$$x_1 = \sqrt{\sqrt{k^4 + \frac{\alpha^4}{4}} + \frac{\alpha^2}{2}}$$

$$\alpha^2 = \frac{P}{E \cdot J}$$

$$x_2 = \sqrt{\sqrt{k^4 + \frac{\alpha^4}{4}} - \frac{\alpha^2}{2}}$$

$$k^4 = \frac{\omega^2 \cdot \mu}{E \cdot J}$$

$$p = \frac{\mu_1 \cdot l_1}{\mu_2 \cdot l_2} \cdot \frac{1}{k \cdot l_1}$$

Differentialgleichung:

$$E \cdot J \cdot w'''' + P \cdot w'' - \omega^2 \cdot \mu \cdot w = 0$$

$$w'''' + \alpha^2 w'' - k^4 w = 0$$

Randbedingungen:

$$w_1(0) = 0$$

$$w_2(0) = w_4(0) = 0$$

$$w_3(0) = 0$$

$$w_1'(0) = 0$$

$$w_2(l_2) = w_4(l_2) = 0$$

$$w_3'''(l_3) = -\frac{k^3}{P} w_3(l_3) - \alpha^2 w_3'(l_3)$$

$$w_2''(l_2) = w_4''(l_2) = 0$$

Übergangsbedingungen:

$$w_1'(l_1) = w_2'(0)$$

$$w_1'''(l_1) = w_3'''(0) - \frac{k^3}{P} w_1(l_1)$$

$$w_1'(l_1) = w_3'(0)$$

$$w_1''(l_1) = w_2''(0) + w_3''(0)$$

$$w_3'(l_3) = w_4'(0)$$

$$w_3''(l_3) = w_4''(0)$$

Spezielle Teillösungen, die die Randbedingungen befriedigen:

$$w_1(x_1) = A_1(\cos x_1 x_1 - \operatorname{ch} x_2 x_1) + B_1(\sin x_1 x_1 - \frac{x_1}{x_2} \operatorname{sh} x_2 x_1)$$

$$w_2(x_2) = A_2 \left[(\cos kx_2 - \operatorname{ch} kx_2) - \frac{\cos kl_2}{\sin kl_2} \sin kx_2 + \frac{\operatorname{ch} kl_2}{\operatorname{sh} kl_2} \operatorname{sh} kx_2 \right]$$

$$w_3(x_3) = A_3 \left(\cos x_1 x_3 - \operatorname{ch} x_2 x_3 - \frac{x_1 x_2^2 \sin x_1 l_3 + \frac{k^3}{P} \cos x_1 l_3 - x_2 x_1^2 \operatorname{sh} x_2 l_3 - \frac{k^3}{P} \operatorname{ch} x_1 l_3}{x_2 x_1^2 \operatorname{ch} x_2 l_3 + \frac{k^3}{P} \operatorname{sh} x_2 l_3} \operatorname{sh} x_2 x_3 \right) \\ + B_3 \left(\sin x_1 x_3 - \frac{-x_1 x_2^2 \cos x_1 l_3 + \frac{k^3}{P} \sin x_1 l_3}{x_2 x_1^2 \operatorname{ch} x_2 l_3 + \frac{k^3}{P} \operatorname{sh} x_2 l_3} \operatorname{sh} x_2 x_3 \right)$$

$$w_4(x_4) = A_4 \left[(\cos kx_4 - \operatorname{ch} kx_4) - \frac{\cos kl_4}{\sin kl_4} \sin kx_4 + \frac{\operatorname{ch} kl_4}{\operatorname{sh} kl_4} \operatorname{sh} kx_4 \right]$$

Die 6 Übergangsbedingungen liefern mit den obigen Gleichungen 6 homogene Gleichungen, die durch Elimination der Amplituden A_2 und A_4 in folgende 4 Gleichungen überführt werden können. Aus der Koeffizientendeterminante dieses Systems wurde die Eigenkurve errechnet, wobei $l_1 = l_3$ und $l_2 = l_4$ angenommen wurde.

$$A_1 F_{1A1}^{(l_1)} + B_1 F_{1B1}^{(l_1)} - A_3 F_{3A1}^{(0)} - B_3 F_{3B1}^{(0)} = 0$$

$$A_1 \cdot 0 + B_1 \cdot 0 + A_3 \left(F_{3A1}^{(l_1)} + \frac{1}{k} \frac{l_2}{\delta} F_{3A2}^{(l_1)} \right) + B_3 \left(F_{3B1}^{(l_1)} + \frac{1}{k} \frac{l_2}{\delta} F_{3B2}^{(l_1)} \right) = 0$$

$$A_1 \left(F_{1A3}^{(l_1)} + \frac{k^3}{P} F_{1A0}^{(l_1)} \right) + B_1 \left(F_{1B3}^{(l_1)} + \frac{k^3}{P} F_{1B0}^{(l_1)} \right) - A_3 F_{3A3}^{(0)} - B_3 F_{3B3}^{(0)} = 0$$

$$A_1 \left(F_{1A1}^{(l_1)} + \frac{1}{k} \frac{l_2}{\delta} F_{1A2}^{(l_1)} \right) + B_1 \left(F_{1B1}^{(l_1)} + \frac{1}{k} \frac{l_2}{\delta} F_{1B2}^{(l_1)} \right) - A_3 \frac{1}{k} \frac{l_2}{\delta} F_{3A2}^{(0)} - B_3 \frac{1}{k} \frac{l_2}{\delta} F_{3B2}^{(0)} = 0$$

Auf der folgenden Seite sind die Funktionen F_{ijk} zusammengestellt.

$$F_{1A0}^{(l_1)} = \cos x_1 l_1 - \operatorname{ch} x_2 l_1$$

$$F_{1B0}^{(l_1)} = \sin x_1 l_1 - \frac{x_1}{x_2} \operatorname{sh} x_2 l_1$$

$$F_{1A1}^{(l_1)} = -x_1 \sin x_1 l_1 - x_2 \operatorname{sh} x_2 l_1$$

$$F_{1B1}^{(l_1)} = x_1 \cos x_1 l_1 - x_1 \operatorname{ch} x_2 l_1$$

$$F_{1A2}^{(l_1)} = -x_1^2 \cos x_1 l_1 - x_2^2 \operatorname{ch} x_2 l_1$$

$$F_{1B2}^{(l_1)} = -x_1^2 \sin x_1 l_1 - x_1 x_2 \operatorname{sh} x_2 l_1$$

$$F_{1A3}^{(l_1)} = x_1^3 \sin x_1 l_1 - x_2^3 \operatorname{sh} x_2 l_1$$

$$F_{1B3}^{(l_1)} = -x_1^3 \cos x_1 l_1 - x_1 x_2^2 \operatorname{ch} x_2 l_1$$

$$F_{3A1}^{(0)} = -x_2 \frac{x_1 x_2^2 \sin x_1 l_1 + \frac{k^3}{P} \cos x_1 l_1 - x_2 x_1^2 \operatorname{sh} x_2 l_1 - \frac{k^3}{P} \operatorname{ch} x_2 l_1}{x_1^2 x_2 \operatorname{ch} x_2 l_1 + \frac{k^3}{P} \operatorname{sh} x_2 l_1}$$

$$F_{3B1}^{(0)} = -x_1 + x_2 \frac{-x_1 x_2^2 \cos x_1 l_1 + \frac{k^3}{P} \sin x_1 l_1}{x_1^2 x_2 \operatorname{ch} x_2 l_1 + \frac{k^3}{P} \operatorname{sh} x_2 l_1}$$

$$F_{3A1}^{(l_1)} = -x_1 \sin x_1 l_1 - x_2 \operatorname{sh} x_2 l_1 - \frac{x_1 x_2^2 \sin x_1 l_1 + \frac{k^3}{P} \cos x_1 l_1 - x_2 x_1^2 \operatorname{sh} x_2 l_1 - \frac{k^3}{P} \operatorname{ch} x_2 l_1}{x_1^2 x_2 \operatorname{ch} x_2 l_1 + \frac{k^3}{P} \operatorname{sh} x_2 l_1} \cdot x_2 \operatorname{ch} x_2 l_1$$

$$F_{3B1}^{(l_1)} = x_1 \cos x_1 l_1 - \frac{-x_1 x_2^2 \cos x_1 l_1 + \frac{k^3}{P} \sin x_1 l_1}{x_1^2 x_2 \operatorname{ch} x_2 l_1 + \frac{k^3}{P} \operatorname{sh} x_2 l_1} \cdot x_2 \operatorname{ch} x_2 l_1$$

$$F_{3A2}^{(0)} = -x_1^2 - x_2^2$$

$$F_{3B2}^{(0)} = 0$$

$$F_{3A2}^{(l_1)} = -x_1^2 \cos x_1 l_1 - x_2^2 \operatorname{ch} x_2 l_1 - \frac{x_1 x_2^2 \sin x_1 l_1 + \frac{k^3}{p} \cos x_1 l_1 - x_1^2 x_2 \operatorname{sh} x_2 l_1 - \frac{k^3}{p} \operatorname{ch} x_2 l_1}{x_1^2 x_2 \operatorname{ch} x_2 l_1 + \frac{k^3}{p} \operatorname{sh} x_2 l_1} \cdot x_2^2 \operatorname{sh} x_2 l_1$$

$$F_{3B2}^{(l_1)} = -x_1^2 \sin x_1 l_1 - \frac{-x_1 x_2^2 \cos x_1 l_1 + \frac{k^3}{p} \sin x_1 l_1}{x_1^2 x_2 \operatorname{ch} x_2 l_1 + \frac{k^3}{p} \operatorname{sh} x_2 l_1} \cdot x_2^2 \operatorname{sh} x_2 l_1$$

$$F_{3A3}^{(0)} = -x_2^3 \frac{x_1 x_2^2 \sin x_1 l_1 + \frac{k^3}{p} \cos x_1 l_1 - x_1^2 x_2 \operatorname{sh} x_2 l_1 - \frac{k^3}{p} \operatorname{ch} x_2 l_1}{x_1^2 x_2 \operatorname{ch} x_2 l_1 + \frac{k^3}{p} \operatorname{sh} x_2 l_1}$$

$$F_{3B3}^{(0)} = -x_1^3 - x_2^3 \frac{-x_1 x_2^2 \cos x_1 l_1 + \frac{k^3}{p} \sin x_1 l_1}{x_1^2 x_2 \operatorname{ch} x_2 l_1 + \frac{k^3}{p} \operatorname{sh} x_2 l_1}$$

$$\frac{\delta}{\gamma} = \frac{\sin k_2 l_2 \cdot \operatorname{ch} k_2 l_2 - \cos k_2 l_2 \cdot \operatorname{sh} k_2 l_2}{2 \cdot \sin k_2 l_2 \cdot \operatorname{sh} k_2 l_2}$$